Quelques résultats globaux sur les variétés

Mémoire de Travail d'Etude et de Recherche, soutenu en mai 1999 pour l'obtention de la Maîtrise de Mathématiques Pures de l'Université Joseph Fourier

Olivier Cinquin
Tuteur : Pr. Jean-Pierre Demailly

Résumé

L'objectif principal de ce TER est la démonstration de la formule de Gauss-Bonnet, qui fait l'objet de la section 7. La démonstration de cette formule est axée sur la théorie du degré et sur la théorie des points critiques de Morse, cette dernière reposant sur un important appareil d'homologie, qui est développé dans ce TER de manière incomplète par manque de temps et d'espace. L'utilisation de l'homologie n'est pas une manière détournée de démontrer une formule qui lui serait étrangère, puisqu'apparaît dans la formule de Gauss-Bonnet la caractéristique d'Euler de la variété à laquelle elle s'applique, caractéristique à laquelle on peut associer diverses significations de nature topologique, et qui est naturellement un invariant topologique (i.e. par homéomorphisme). Si l'on peut regretter de ne pas être en mesure d'apprécier pleinement l'intérêt de la formule que l'on démontre, il n'en reste pas moins que les méthodes employées pour arriver à cette démonstration sont une application intéressante du cours de géométrie différentielle, et qu'elles permettent de découvrir un domaine des mathématiques, celui de la topologie, dont la richesse est indéniable.

Note : les variétés considérées, ainsi que les fonctions que l'on définit dessus, sont implicitement considérées de classe C^∞, à moins qu'il n'en soit précisé autrement.

1 Préliminaires intégraux : volumes des tubes

On considère une sous-variété X de dimension d d'un espace E *euclidien* de dimension n. On procède alors aux définitions suivantes :

- $N_xX = (T_xX)^\perp$ est l'espace normal à X en x.
- $NX = \{(x,v) | x \in X, v \in N_xX\}$ est le fibré normal à X. C'est une sous-variété de dimension n de $X \times E$.
- On pose $N^\varepsilon X = \{(x,v) | x \in X, v \in N_xX, \| v \| < \varepsilon\}$.
- $NUX = \{(x,v) | x \in X, v \in N_xX, \| v \| = 1\}$ est le fibré normal unitaire. NUX est de dimension $n-1$.

– can : $NX \to E, (x,v) \longmapsto x+v$ est l'application canonique.
– $\mathrm{TUB}^{\varepsilon}(X) = can(N^{\varepsilon}X)$ est le voisinage tubulaire de X de rayon ε.

On va déterminer des densités sur les variétés définies ci-dessus de manière à ce qu'elles soient aussi canoniques que possible et qu'elles possèdent de bonnes propriétés pour l'intégration.

Lemme 1.1. *Il existe des densités Δ sur NX et Ψ sur NUX telles que l'on ait les propriétés suivantes :*

$$\int_{NX} f.\Delta = \int_X \int_{N_x X} f.\varepsilon_x.\delta$$
$$\int_{NUX} f.\Psi = \int_X \int_{\{x\}\times NU_x X} f.\tau_x.\delta$$

pour toute fonction f intégrable.

(où ε_x, τ_x, et δ sont les densités canoniques données par la structure euclidienne)

En notant Δ_0 la densité canonique de E, on définit naturellement le volume suivant :

$$\mathrm{Volume}(\mathrm{TUB}^{\varepsilon}\, X) = \int_{\mathrm{TUB}^{\varepsilon}\, X} \Delta_0 = \int_{N^{\varepsilon}X} can^{\star}\Delta_0$$

On cherche à exprimer $can^{\star}\Delta_0$ sous la forme $G\Delta$ où Δ est la densité sur NX définie ci-dessus.

G s'écrit nécessairement sous la forme suivante :

$$G = \sum_{i=0}^{d} W_i$$

où $\forall i, W_i \in C^{\infty}(NX)$ et pour tout x fixé, $v \longmapsto W_i(x,v)$ est un polynôme homogène de degré i sur l'espace vectoriel $N_x X$.

On obtient donc la formule suivante :

$$\mathrm{Volume}(\mathrm{TUB}^{\varepsilon}\, X) = \int_X \sum_{i=0}^{d} \int_{N_x^{\varepsilon}X} W_i(x,v)\varepsilon_x\delta$$

Cela conduit à calculer calculer chaque terme de la somme en faisant sortir ε de l'intégrale, de manière à obtenir pour le volume un polynôme en ε. Par un changement de coordonnées polaire, on obtient

$$\int_{N_x^{\varepsilon}X} W_i(x,v)\varepsilon_x\delta = \frac{\varepsilon^{n-d+i}}{n-d+i}\int_{NU_x X} W_i(x,v)\tau_x$$

où τ_x est la densité canonique de $NU_x X$.

Définition 1.2. On définit la 2i-ème courbure de Weyl de X sous-variété de E de la manière suivante :

$K_{2i}(x) = \int_{NU_x X} W_i(x,v)\tau_x$ pour $i = 0..[\frac{d}{2}]$

On a $\int_{NUX} W_d\psi = \int_X (\int_{NU_X X} W_d\tau_x)\delta = \int_X K_d\delta = \int_{NUX} W_d\Theta = \int_{NUX} \gamma^{\star}\Sigma$

où Θ est la forme volume canonique de NUX et Σ la forme volume canonique sur $S(E)$ déduite de celle de E.

2 Eléments d'homologie

Ce paragraphe est plus étendu que ne l'exigeait strictement la démonstration de la formule de Gauss-Bonnet, mais il permet de montrer ce qu'est la caractéristique d'Euler d'une manière plus parlante que la somme des dimensions des espaces de de Rham.

Il existe de nombreuses théories d'homologie différentes, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients, chacune étant plus ou moins adaptée à l'étude de certains types de trous dans les espaces considérés. Les axiomes d'Eilenberg et Steenrod, énoncés en 1952, permettent de décrire de manière homogène les éléments communs à ces théories. Ce qui suit est une description simplifiée, tirée de M. HENLE, A COMBINATORIAL INTRODUCTION TO TOPOLOGY.

Une théorie d'homologie doit associer, à chaque espace E d'une classe assez générale, une suite de groupes $(H_i(E))$. A toute transformation continue $f : E \to F$ d'un espace dans un autre, elle doit associer une suite de morphismes des groupes d'homologie $H_i(f) : H_i(E) \to H_i(F)$. On doit avoir $H_i(Id) = Id$, $H_i(f \circ g) = H_i(f) \circ H_i(g)$, deux applications homotopes doivent définir les mêmes groupes, et les groupes d'homologie d'un espace réduit à un point doivent être triviaux.

Le résultat remarquable est que, dans le cas des complexes cellulaires, les théories satisfaisant aux axiomes d'Eilenberg et Steenrod donnent les mêmes invariants.

2.1 Complexes cellulaires (CW-complexes)

K est un complexe cellulaire si et seulement s'il existe une partition de K en cellules (espaces homéomorphes à $\mathbb{R}^n$) et pour chaque cellule e de dimension m une application d'attachement $f : \overline{B^m(0,1)} \to K^m$ (où l'on note K^m la réunion des cellules de dimension inférieure ou égale à m) telle que $f(S^{m-1}) \subset K^{m-1}$ et $f_{|\overline{B^m(0,1)} \setminus S^{m-1}}$ soit un homéomorphisme sur e (i.e. le bord de la cellule se rattache à des cellules de dimension immédiatement inférieures). Un exemple élémentaire de complexe cellulaire est un graphe, les sommets étant de dimension 0 et les arêtes de dimension 1.

2.2 Homologie simplicale

C'est l'homologie que l'on construit sur un complexe cellulaire . Les chaînes sont les sommes finies de cellules, et l'opérateur de frontière ∂ associe à une cellule l'ensemble des cellules rattachées à sa frontière un nombre impair de fois.

Dans les paragraphes 2.3 et 2.4 on considère un espace topologique X.

2.3 Homologie singulière

C'est l'homologie la plus utilisée, et la plus puissante. Elle a le désavantage de définir des groupes qui sont très grands et donc incalculables dans la pratique.

- Le simplexe de dimension n est l'envelope convexe des vecteurs de base de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Delta_n = \{(x_0, .., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \forall i, x_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\}$$

- Bord d'un simplexe : on définit $\delta_i^p(x_0, .., x_{p-1}) = (x_0, .., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, .., x_{p-1})$
- Etant donné un anneau A, on définit une chaîne singulière dans X de degré p de la manière suivante : $\sigma = \sum_{i=0}^{m} a_i \sigma_i$ où pour tout i $a_i \in A, \sigma_i \in C^0(\Delta_p, X)$. On note $C_p(A, X)$ l'ensemble de ces chaînes.
- Application bord : ∂_p va de l'ensemble des chaînes de degré $p+1$ dans l'ensemble des chaînes de degré p pour tout p ; on note abusivement ∂ toutes ces applications : $\partial\sigma = \sum_{i=0}^{m} n_i \partial\sigma_i$ où $\partial\sigma_j = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \sigma_j \circ \delta_i^{p+2}$. On a $\delta^2 = 0$.
- Soient $Z_p(X) = \mathrm{Ker}(\partial_p), B_p(X) = \mathrm{Im}(\partial_p)$. Le A-module quotient d'homologie singulière de degré p est $H_p(X, A) = Z_p(X)/B_p(X)$.

2.4 Cohomologie singulière

Les modules de cohomologie singulière sont définis par dualité à partir des modules d'homologie singulière.

- $C^p(X, A) = Hom(C_p(X, A))$. On définit $\delta^\star$ comme la transposée de δ. On a aussi $(\delta^\star)^2 = 0$.
- De même que précédemment, on peut donc définir $H^p(X, A) = Z^p(X, A)/B^p(X, A)$.

2.5 Groupes de de Rham

On considère ici le cas plus restrictif où X est une variété lisse.

$H^r_{DR}(X) = F^r(X)/B^r(X)$ est le r-ième groupe de de Rham de la variété X, où l'ensemble $F^r(X)$ est l'espace vectoriel des formes différentielles C^∞ fermées de degré r, et $B^r(X)$ l'espace des formes différentielles C^∞ exactes de degré r (pour r entier inférieur à la dimension de X). On obtient un espace isomorphe en considérant plus généralement des formes différentielles simplement continues, ou même définies à partir de distributions.

2.6 Théorème de de Rham

Les espaces vectoriels $H^r_{DR}(X)$ et $H^r(X, \mathbb{R})$ sont isomorphes.

2.7 Nombres de Betti

$b_k(X) = \dim(H^k(X))$ est le k-ième nombre de Betti de X. Les groupes de cohomologie étant invariants par homéomorphisme, c'est aussi le cas des nombres de Betti.

b_0 est le nombre de composantes connexes de X.

Pour la sphère S^d, $b_0 = b_d = 1$, les autres nombre de Betti étant nuls.

2.7.1 Interprétation des nombres de Betti dans le cas des surfaces

b_1 Si V est simplement connexe, $H^1_{DR}(V) = \{0\}$. La réciproque est fausse, par exemple dans le cas d'une surface non orientable comme l'espace projectif réel de dimension 2.

b_2 Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. Le nombre de composantes connexes de V qui sont orientables est k
2. $H^2_{DR}(V) = \mathbb{R}^k$

2.8 Caractéristique d'Euler

$\chi(X) = \Sigma_{k=0}^{d}(-1)^k b_k(X)$ est la caractéristique d'Euler de l'espace topologique X. Dans le cas des complexes cellulaires, elle peut être interprétée avec toute théorie d'homologie vérifiant les axiomes énoncés plus haut. A l'aide de l'homologie simplicale, on peut prouver que si l'espace considéré est un complexe cellulaire de rang fini, alors $\chi(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k n_k(X)$ où $n_k(X)$ est le nombre de cellules de dimension k.

Pour la sphère S^d, $\chi(S^d) = 1 + (-1)^d$, et si on note S, C, et F respectivement le nombre de sommets, de côtés, et de faces d'une triangulation, on a toujours $S-C+F = 1+(-1)^d$. On voit que la caractéristique d'Euler est assez facile à calculer.

On peut aussi remarquer que la sphère est la seule surface compacte, connexe, dont le nombre de connectivité est 0 (c'est à dire que l'on ne peut tracer aucune courbe fermée sur la sphère telle que la sphère privée de cette courbe soit toujours connexe), et à partir de là démontrer que la sphère de dimension 2 est la seule surface à avoir caractéristique d'Euler 2, les autres étant toujours plus petites.

Les deux paragraphes suivants sont tirés de J. Milnor, Morse Theory, à l'exception de la section 4.1, tirée de M. Berger, B. Gostiaux, Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.

3 Eléments d'homotopie

Les définitions données dans cette section seront utilisées pour la théorie de Morse, qui servira à la démonstration de la formule de Gauss-Bonnet .

Définition 3.1. Soient X et Y deux variétés, $f, g \in (C^\infty(X,Y))^2$. On dit que f et g sont homotopes si

$$\exists\, F : [0,1] \times X \to Y$$

vérifiant :

– $\forall t \in [0,1],\ F_t \in C^0(X,Y)$

– Toutes les dérivees partielles de F par rapport à x existent et sont continues.

Définition 3.2. Deux espaces X et Y ont même type d'homotopie s'il existe un couple d'applications $f \in C^0(X,Y), g \in C^0(Y,X)$ telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient homotopes à l'identité de X et Y respectivement. f est alors une équivalence homotopique de X à Y.

Deux espaces ayant même type d'homotopie ont en particulier des groupes de cohomologie isomorphes.

3.0.1 Lemme de Whitehead

Ce lemme dit que si l'on attache à un espace X une cellule e^λ en identifiant les points du bord de la cellule à leur image par une certaine fonction φ (les ouverts de la topologie quotient étant donnés par les images réciproques par la projection des ouverts de l'espace $X \bigsqcup e^\lambda$), les espaces obtenus sont tous du même type d'homotopie lorsque φ décrit une classe d'équivalence homotopique. Plus précisément, cela donne :

Soient φ_0 et φ_1 des applications homotopes de ∂e^λ dans X. Alors à partir de l'identité sur X on obtient une équivalence homotopique K : $X \cup_{\varphi_0} e^\lambda \to X \cup_{\varphi_1} e^\lambda$.

Lemme 3.3. *Soit φ une applications de ∂e^λ dans X. Alors toute équivalence homotopique f de X à Y donne une équivalence homotopique F de $X \cup_\varphi e^\lambda$ à $Y \cup_{f\circ\varphi} e^\lambda$.*

4 Eléments de théorie de Morse

On s'intéresse à la partie de la théorie de Morse permettant d'aboutir au théorème fondamental de cette théorie, qui permet de relier le type d'homotopie d'une variété (qui est un invariant de la variété par homéomorphisme) aux points critiques d'une fonction générique possédant certaines bonnes propriétés. Ce théorème sert de façon fondamentale dans la démonstration de la formule de Gauss-Bonnet.

4.1 Lemme de Morse

On commence par le lemme de Morse sur l'existence d'un système de coordonnées local dans lequel une fonction possédant un point critique non dégénéré s'exprime comme sommes et différences des carrés des coordonnées. On a besoin de deux lemmes de "factorisation" des 0 d'une fonction C^∞.

Lemme 4.1. *Soit U un ouvert de $\Re^2$ étoilé en 0, $f \in C^\infty(U,\Re)$ telle que $f(0,0)=0$. Alors $\exists (g,h) \in (C^\infty(U,\Re))^2$ $f(x,y) = xg + yh$.*

On a

$$f(x,y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(xt,yt)dt = x\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(xt,yt)dt + y\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xt,yt)dt$$

On obtient la régularité des fonctions trouvées par les théorèmes de dérivation sous le signe somme.

◁

Lemme 4.2. *Si de plus $f'(0,0) = 0$, alors $\exists (u,v,w) \in (C^\infty(U,\Re))^2 f(x,y) = x^2u + 2xyv + y^2w$*

On a $g(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, d'où d'après le lemme précédent $g(x,y) = xu + yv_1$. De même, $h(x,y) = xv_2 + yw$.

$\triangleleft$

Lemme 4.3. *Lemme de Morse : soit X une variété, $f \in C^\infty(X)$, x un point critique non-dégénéré de f d'indice i. Alors il existe une carte (U,φ) centrée en x telle que si on note $(x_1,..,x_n)$ les coordonnées locales, on ait $(f \circ \varphi^{-1})(x_1,..,x_n) = -x_1^2 - .. - x_i^2 + x_{i+1}^2 + .. + x_n^2$.*

Démonstration (dans le cas $n = 2$) :

A l'aide d'une carte on se ramène au cas d'une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ (choisi tel qu'il soit étoilé en 0, ce qui par restriction est toujours possible, $\mathbb{R}^2$ étant un espace localement convexe), f étant telle que $f(0) = 0$. D'après le lemme précédent, il existe des fonctions lisses u, v, et w telles que $f(x,y) = ux^2 + +2vxy + wy^2$.

Soient les réels r, s, et t définis de la manière suivante : $r = u(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $t = w(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$, $s = v(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

La dérivée seconde étant supposée non dégénérée en 0, on a $rt - s^2 \neq 0$. On distingue plusieurs cas.

Si $r \neq 0$, u ne s'annule pas sur un voisinage U' de 0. Supposons $u > 0$, le cas $u < 0$ se traîtant de la même manière. On peut écrire sur U'

$$f(x,y) = u(x + \frac{v}{u}y)^2 + y^2(w - \frac{v^2}{u})$$

Si $rt - s^2 > 0$, on a $w - \frac{v^2}{u} > 0$ dans un voisinage U'' de 0. Donc on peut écrire $f = \text{signe}(r)\xi^2 + \eta^2$, avec

$$\xi = \sqrt{u}(x + \frac{v}{u}y),\ \eta = \sqrt{w - \frac{v^2}{u}}y$$

Il reste à montrer que les coordonnées ainsi définies définissent bien un difféomorphisme de U'' sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, ce qui provient du fait que la différentielle de l'application coordonées est bijective en tout point de U'', cette différentielle s'écrivant

$u(0,0)$	$v(0,0)$
0	$\sqrt{w(0,0) - \frac{v^2(0,0)}{u(0,0)}}$

Le déterminant est $r\sqrt{t - \frac{s^2}{r}} \neq 0$.

Si $rt - s^2 < 0$, f s'écrit $f = \xi^2 - \eta^2$, avec $\eta = y\sqrt{\frac{v^2}{u} - w}$.

Le cas $t \neq 0$ se traîte de la même manière (les rôles des deux variables x et y sont évidemment symétriques). Reste donc le cas $r = t = 0$. On effectue alors le changement de variables $(x,y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

$\triangleleft$

4.2 Théorie de Morse

Dans la suite f est une fonction C^∞ d'une variété sans bord M de dimension d, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont les points critiques ne sont pas dégénérés. Soit

$M^a = f^{-1}]-\infty, a]$

Théorème 4.4. *Si $a < b$, $f^{-1}[a,b]$ est compact et ne contient aucun point critique de f, alors M^a est un rétracte par déformation de M^b.*

La rétraction se fait en suivant les lignes de gradient de f. On définit la fonction $\rho \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ de la manière suivante : $\rho = \frac{1}{\|\mathrm{grad}(f)\|^2}$ (on suppose avoir choisi une métrique riemannienne) dans un voisinage compact de $f^{-1}[a,b]$, $\rho = 0$ ailleurs. Comme on peut le voir de la même manière qu'en 5.1.2, le champ de vecteurs $X_q = \rho(q)\,\mathrm{grad}(f)_q$ génère un groupe à un paramètre de difféomorphismes φ_t.

On cherche à calculer la variation de f le long d'une courbe intégrale pour $q \in f^{-1}[a,b]$ fixé, et on a choisi ρ de manière que cette variation soit très simple :

$$\frac{df(\varphi_t(q))}{dt} =< \frac{d\varphi_t(q)}{dt}, \mathrm{grad}(f) >=< X, \mathrm{grad}(f) >= 1$$

On définit $r : [0,1] \times M^b \to M^b$ de la manière suivante : $r(t,q) = q$ si $f(q) \le a$, $r(t,q) = \varphi_{t(a-f(q))}(q)$ sinon. r est une rétraction de M^b sur M^a.

$\triangleleft$

Théorème 4.5. *Soit p un point critique (non-dégénéré) de f, d'indice λ (λ est la dimension maximale d'un sous-espace où la dérivée seconde est définie négative). En écrivant $c = f(p)$, pour ε assez petit, si $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ est compact et ne contient qu'un point critique de f, alors $M^{c+\varepsilon}$ a le type d'homotopie de $M^{c-\varepsilon}$ avec une cellule de dimension λ attachée. Dans le cas d'une valeur critique correspondant à plusieurs points critiques, il faut attacher les cellules correspondant à chacun d'entre eux.*

D'après le lemme de Morse, dans un voisinage U de p on peut choisir un système de coordonnées $u^1, .., u^n$ tel que f s'exprime de la manière suivante dans ce voisinage :

$$f(u^1, .., u^n) = c - (u^1)^2 - .. - (u^\lambda)^2 + (u^{\lambda+1})^2 + .. + (u^n)^2$$

On définit les fonctions ξ et η de U dans $\mathbb{R}_+$ comme suit :

$$\xi(x) = [u^1(x)]^2 + .. + [u^\lambda(x)]^2$$

$$\eta(x) = [u^{\lambda+1}(x)]^2 + .. + [u^n(x)]^2$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ soit compact et ne contienne qu'un seul point critique, et tel que le voisinage U contienne en coordonées locales la boule de centre 0 et de rayon 2ε.

On définit e^λ de la manière suivante : $e^\lambda = \{x \in U | \xi(x) \le \varepsilon, \eta(x) = 0\}$.

On a $e^\lambda \bigcap M^{c-\varepsilon} = \partial e^\lambda$, et on peut donc considérer que e^λ est rattachée à $M^{c-\varepsilon}$ par l'inclusion. On va montrer que $M^{c-\varepsilon} \bigcup e^\lambda$ est un rétracte par déformation de $M^{c+\varepsilon}$, ce qui montrera que ces deux espaces ont même type d'homotopie.

On va modifier la fonction f au voisinage de p de manière à obtenir une nouvelle fonction F à laquelle on pourra appliquer le théorème 4.4. Pour cela on a besoin d'une fonction auxiliaire $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes :

– $\mu(0) > 0$
– $\forall\, r \in \mathbb{R}\; r \geq 2\varepsilon,\ \mu(r) = 0$
– $\forall\, r \in \mathbb{R},\ -1 < \mu'(r) < 0$

F coïncide avec f en dehors de U, et est donnée par la formule suivante dans U :

$$F = f - \mu \circ (\xi + 2\eta)$$

Etant donné son mode de construction, F est C^∞ sur M.

On remarque que $F^{-1}(]-\infty,c+\varepsilon]) = f^{-1}(]-\infty, c+\varepsilon])$. On a $\forall\, x \in M,\ F(x) \leq f(x)$, d'où $f^{-1}(]-\infty, c+\varepsilon]) \subset F^{-1}(]-\infty, c+\varepsilon])$. D'autre part, si $F(x) \leq c+\varepsilon$, alors $x \in U \cup M^{c-\varepsilon} \subset M^{c+\varepsilon}$.

On remarque également que F et f ont mêmes points critiques : en exprimant F à l'aide de ξ et η, on a

$$F = c - \xi + \eta - \mu \circ (\xi + 2\eta)$$

On peut donc considérer F comme fonction de $\mathbb{R}^2$, et on a pour la différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \mu'(\xi + 2\eta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta)$$

Etant donné que $dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta$, et que $d\xi$ et $d\eta$ ne s'annulent simultanément qu'à l'origine, F n'a pas de point critique dans $U \setminus \{p\}$.

D'autre part, $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \subset f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, et le seul point critique de F que cet ensemble puisse contenir est donc p. Or

$$F(p) = c - \mu(0) < c - \varepsilon$$

Donc $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ ne contient aucun point critique de F, et $F^{-1}(]-\infty, c-\varepsilon])$ est donc un rétracte par déformation de $F^{-1}(]-\infty, c+\varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$.

On note $M^{c-\varepsilon} \cup H = F^{-1}(]-\infty, c-\varepsilon])$. Il reste à montrer que $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ est un rétracte par déformation de $M^{c-\varepsilon} \cup H$ (la relation "être un rétracte par déformation de" étant transitive), ce que l'on va faire de manière directe, en exhibant la famille d'applications $(r_t : M^{c-\varepsilon} \cup H \to M^{c-\varepsilon} \cup H)_{t \in [0,1]}$ ad-hoc.

r_t est l'identité en-dehors de U, et dans U on distingue trois cas en fonction des valeurs de ξ et η :

1. Si $\xi \leq \varepsilon$, $r_t : (u^1, .., u^n) \longmapsto (u^1, .., u^\lambda, tu^{\lambda+1}, .., tu^n)$
2. Si $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$, $r_t : (u^1, .., u^n) \longmapsto (u^1, .., u^\lambda, s_t u^{\lambda+1}, .., s_t u^n)$ où $s_t = t + (1-t)\sqrt{\frac{\xi - \varepsilon}{\eta}}$
3. Si $\eta + \varepsilon \leq \xi$, r_t est l'identité.

r_1 est dans les trois cas l'identité, et r_0 une rétraction dans e^λ. La définition fait que globalement on obtient bien une fonction C^∞.

◁

Théorème 4.6. *Si pour tout a de M M^a est compact, alors M^a a le type d'homotopie d'un complexe cellulaire C^a possédant autant de cellules de dimension λ que de points critiques d'indice λ dont la valeur critique associée est dans* $]-\infty, a]$.

De ce théorème on tire un corollaire moins riche mais qui suffit à la formule de Gauss-Bonnet.

Théorème 4.7. *Soit $c_k(f)$ le nombre de points critiques de f d'indice k. Alors, si M est compacte, on a*

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k c_k(f)$$

Démonstration (inspirée de C. GODBILLON, ÉLÉMENTS DE TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE) :

l'idée est que l'on connaît “à peu près” les groupes d'homologie du complexe cellulaire étant donné sa construction très simple, et que ces à-peu-près disparaissent quand on effectue la somme alternée des dimensions.

On procède par récurrence. Soient donc deux réels a et b ($a < b$) tels qu'il n'y ait qu'une seule valeur critique de f entre a et b, et supposons qu'on ait

$$\chi(M^a) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k c_k^a(f)$$

où $c_k^a(f)$ est le nombre de points critiques de f d'indice k, à valeur associée dans $]-\infty, a]$. On va montrer que le résultat est aussi vrai pour b. f étant continue et M compacte, et les points critiques étant isolés car non dégénérés, il n'y en a qu'un nombre fini, et on peut donc énumérer leurs valeurs associées dans l'ordre croissant. Par récurrence, la démonstration sera donc achevée.

On suppose qu'un seul point critique est associé à la valeur critique entre a et b, le cas où il y en a plusieurs se traîtant en itérant la démonstration qui suit. D'après le théorème 4.6, on est passé de C^a à C^b en ajoutant une cellule de dimension λ, que l'on supposera être la boule unité B^λ.

Traîtons tout-d'abord le cas $\lambda = 0$. C'est un cas très particulier puisqu'il n'y a pas d'attachement à proprement parler, étant donné qu'une cellule de dimension 0 (i.e. un point) n'a pas de bord. Le complexe cellulaire C^b est donc le complexe cellulaire C^a auquel on a ajouté un point. On a de manière générale $H^q(C^b) = H^q(C^a)$ pour $q > \lambda$, étant donné que toute forme différentielle de degré $q > \lambda$, qu'elle soit exacte ou fermée, est nulle sur la cellule attachée de dimension λ. Seul H^0 est donc affecté ; plus précisément, on a ajouté une composante connexe et on a donc $b_k(C^b) = b_k(C^a) + 1$. La formule proposée est donc valable pour b, étant donné que la somme augmente de 1 et la caractéristique d'Euler aussi.

Dans le cas $\lambda > 0$, on considère le recouvrement ouvert suivant de C^b, où ε est un réel fixé de $]0, \frac{1}{2}[$:

$U_1 = \{x \in C^b | x \in C^a \, oud(x, S^{\lambda-1}) \leq \varepsilon\}$. U_1 est le complexe C^a auquel on a ajouté une couronne de la nouvelle boule. C^a est un rétracte par déformation de U_1, comme on peut le voir en projetant progressivement la couronne sur la sphère. On a donc $H^q(U_1) = H^q(C^a)$ pour tout q.

$U_2 = \{x \in B^\lambda | \parallel x \parallel < 1\}$. U_2 est une boule ouverte de $\mathbb{R}^\lambda$, dont les groupes de cohomologie sont bien connus. Pour $q \in \mathbb{N}^\star$, $H^q(U_2) = \{0\}$.

Pour $q \in \mathbb{N}^\star$, on écrit la suite exacte longue de Mayer-Vietoris :

$$.. \leftarrow H^q(U_1 \cap U_2) \leftarrow H^q(C^a) \leftarrow H^q(C^b) \leftarrow H^{q-1}(U_1 \cap U_2) \leftarrow ..$$

Le cas $\lambda = 1$ se traîte aussi à part. Supposons que le nombre de composantes connexes de C^a soit égal à α ($\alpha = b_0(C^a)$). On n'a pas ajouté de composante connexe en attachant une cellule de dimension 1, et le nombre de composantes connexes de C^b vaut aussi α. Ecrivons la suite longue de Mayer-Vietoris :

$$H^0(C^b) \to H^0(U_1) \bigoplus H^0(U_2) \to H^0(U_1 \cap U_2) \to H^1(C^b) \to H^1(U_1) \bigoplus H^1(U_2) \to H^1(U_1 \cap U_2)$$

En remplaçant les groupes connus par leur expression, on obtient :

$$0 \to \mathbb{R}^\alpha \to^i \mathbb{R}^{\alpha+1} \to^h \mathbb{R}^2 \to^f H^1(C^b) \to^g H^1(C^a) \to 0$$

En étudiant cette suite on trouve que $b_1(C^b) = b_1(C^a) + 1$. Ceci prouve que la formule est aussi valable pour b.

On continue la démonstration dans le cas $\lambda > 1$.

$U_1 \cap U_2$ est une couronne de la boule ajoutée. Etant donné que la couronne se rétracte sur la sphère, on connaît les groupes de cohomologie :

$$\forall \, q \in 1..\lambda - 2, \; H^q(U_1 \cap U_2) = \{0\}$$

$$H^{\lambda-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}$$

On en déduit pour $q \in 2..\lambda - 2$ (avec la convention habituelle selon laquelle $i..j = \oslash$ si $j < i$) la suite exacte suivante :

$$0 \leftarrow H^q(C^a) \leftarrow H^q(C^b) \leftarrow 0$$

D'où $H^q(C^a) \cong H^q(C^b)$. Le cas $q = 1$ se traîte avec la même suite, mais étant donné que $H^0(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}$ on doit considérer une suite un peu plus longue. On arrive au même résultat $H^1(C^a) \cong H^1(C^b)$.

Pour $q = 0$, étant donné que l'on n'a pas ajouté de composante connexe en attachant la cellule, $H^0(C^a) = H^0(C^b)$.

Seuls les groupes de cohomologie d'ordres λ et $\lambda - 1$ peuvent donc être affectés par l'ajout de la cellule. On a la suite exacte suivante :

$$0 \leftarrow H^\lambda(C^a) \leftarrow^{f_1} H^\lambda(C^b) \leftarrow^{f_2} \mathbb{R} \leftarrow^{g_1} H^{\lambda-1}(C^a) \leftarrow^{g_2} H^{\lambda-1}(C^b) \leftarrow 0$$

Deux cas se présentent alors :

- Supposons que g_1 soit nulle. g_2 est alors surjective, et c'est un isomorphisme. Donc $\dim[H^{\lambda-1}(C^a)] = \dim[H^{\lambda-1}(C^b)]$. f_2 est injective, d'où $\dim[\mathrm{Im}(f_2)] = 1 = \dim[\mathrm{Ker}(f_1)]$. f_1 étant surjective, on a $\dim[H^\lambda(C^a)] = \dim[H^\lambda(C^b)] - 1$.
- Supposons que g_1 soit non nulle. Alors f_2 est nulle, et f_1 est un isomorphisme. On a aussi $\dim[\mathrm{Im}(g_2)] = \dim[\mathrm{Ker}(g_1)] = \dim[H^{\lambda-1}(C^a)] - 1 = \dim[H^{\lambda-1}(C^b)]$.

Pour résumer, $\dim[H^{\lambda-1}(C^b)] = \dim[H^{\lambda-1}(C^a)] - \eta$, $\eta \in \{0, 1\}$, et $\dim[H^\lambda(C^b)] = \dim[H^\lambda(C^a)] + (1 - \eta)$.

$$\chi(M^b) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k b_k(M^b) = \sum_{k \neq \lambda-1, \lambda} (-1)^k b_k(M^b) + (-1)^{\lambda-1} b_{\lambda-1}(M^b) + (-1)^\lambda b_\lambda(M^b)$$

$$\chi(M^b) = \chi(M^a) - (-1)^{\lambda-1}\eta + (-1)^\lambda(1 - \eta) = \chi(M^a) + (-1)^\lambda$$

L'initialisation de la récurrence se fait en remarquant que f étant continue et M compacte, $f(M) \subset [c, d]$. Comme $M^{c-1} = \emptyset$, $\chi(M^{c-1}) = 0$; or $c_k^{c-1}(f) = 0$ pour tout k.

Etant donné que $M^d = M$, la preuve du théorème 4.7 est achevée.

$\triangleleft$

5 Théorème de Moser et degré

5.1 Préliminaires sur les champs de vecteurs

5.1.1 Produit intérieur d'une forme différentielle $\alpha \in \Omega^r(X)$ par un champ de vecteurs ξ :

Cela consiste à remplacer en chaque point le premier vecteur tangent par le vecteur donné par le champ, pour obtenir une forme différentielle dont le degré est diminué de 1 :

$$(\mathrm{int}(\xi).\alpha)(x)(v_1, .., v_{r-1}) = \alpha(x)(\xi(x), v_1, ..v_{r-1})$$

A l'aide du produit intérieur, une forme volume α sur X de dimension d détermine un isomorphisme entre les champs de vecteurs sur X et les formes différentielles de degré $d - 1$, comme on le voit avec la formule suivante où U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$:

$$\mathrm{int}(\xi)\alpha_{|U} = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i-1} a.\xi_i dx_1 \wedge .. \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_d$$

5.1.2 Equations différentielles

On peut reprendre pour l'étude des équations différentielles sur des variétés les outils utilisés dans le cas de $\mathbb{R}^n$ (théorèmes d'unicité, flot, groupes de difféomorphismes, etc.). Un théorème intéressant, et qui n'a pas d'équivalent dans le cas de $\mathbb{R}^n$, est le suivant :

Théorème 5.1. *Soit ξ un champ de vecteurs sur X variété* compacte. *Soit $D(\xi) = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times X | t \in J(x)\}$ où $J(x)$ est l'intervalle maximal de définition de la courbe intégrale maximale passant par x. Alors $D(\xi) = \mathbb{R} \times X$. Si G_t est l'application de flot déplaçant suivant la courbe intégrale pendant une durée t, G_t est un difféomorphisme.*

Le fait que l'intervalle de définition soit $\mathbb{R}$ en entier provient du fait que la solution ne peut ni arriver à la frontière du domaine de définition comme dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ni "partir à l'infini".

Démonstration (partielle) : pour $x \in X$, on définit l'ouvert U_x sur lequel la courbe intégrale est définie (on connaît l'existence locale de cette courbe intégrale) ; X étant compacte se recouvre avec une nombre fini des ouverts U_x , $x \in X$.

5.2 Théorème de Moser

Théorème 5.2. *Si X est une variété compacte, orientée, et connexe de dimension d, $H^d_{DR}(X) \cong \mathbb{R}$.*

On admet que $H^d_{DR}(X)$ est de dimension au plus 1, ce qui provient du fait que toute forme différentielle de degré maximal sur $\mathbb{R}^n$ à support compact et d'intégrale nulle admet une primitive à support compact (la démonstration étant pénible).

La variété X étant orientée, on choisit naturellement comme morphisme l'intégration, qui passe au quotient (comme on le voit avec le théorème de Stokes). X étant orientée, il existe une forme d'intégrale non nulle, ce qui prouve que le morphisme ainsi défini est surjectif. Du fait des dimensions, $H^d_{DR}(X) \cong \mathbb{R}$.

$\triangleleft$

On déduit de cette démonstration que les formes exactes de degré d sont exactement celles qui sont d'intégrale nulle.

Théorème 5.3. *Théorème de Moser : soit X une variété compacte, connexe, orientée de dimension d, α et β deux formes volumes telles que $\int_X \alpha = \int_X \beta$. Alors il existe $f \in \mathrm{Diff}(X)$ tel que $\beta = f^*\alpha$.*

Démonstration

On définit une famille de formes volumes par $\forall t \in [0,1]$, $\alpha_t = (1-t)\alpha + t\beta$. D'autre part, $\alpha - \beta$ étant d'intégrale nulle, $\exists\, \gamma \in \Omega^{d-1}(X)$ vérifiant $d\gamma = \alpha - \beta$. Il existe de plus un champ de vecteurs ξ tel que $\mathrm{int}(\xi)\alpha = -\gamma$. Soit F le flot global de ξ, qui existe car X est compacte. La formule de dérivation des applications composées montre que

$$\frac{d(F_t^\star \alpha_t)}{dt}(t) = \frac{d(F_s^\star \alpha_t)}{ds}(t) + F_t^\star(\beta - \alpha)$$

En admettant que pour une forme fermée ω

$$\frac{d(F_s^\star \omega)}{ds}(t) = F_t^\star(d(\mathrm{int}(\xi)\omega)$$

on trouve finalement

$$\frac{d(F_t^\star \alpha_t)}{dt}(t) = F_t^\star(d(-\gamma)) + F_t^\star(\beta - \alpha) = 0$$

Donc $F_1^\star \beta = \alpha$, et le difféomorphisme recherché est F_1^{-1}.

$\triangleleft$

5.3 Définition du degré

Il existe plusieurs notions de degré en fonction de l'espace où sont définies les fonctions auxquelles on attache ce degré. On peut par exemple le faire dans le cadre des opérateurs compacts d'un espace de Banach. Le degré est surtout intéressant de par les résultats qualitatifs qu'il permet d'obtenir (par exemple l'existence de points fixes comme pour le théorème de Brouwer, points fixes qui dans le bon cadre peuvent correspondre à la solution d'une équation différentielle ; cela est détaillé dans O. Kavian, introduction a la theorie des points critiques). On s'intéressera ici au degré d'une application définie d'une variété dans une autre.

Le théorème suivant dit qu'en une valeur régulière, un morphisme de variétés de mêmes dimensions est localement un revêtement. p application d'une variété X dans une variété Y est un revêtement si et seulement si elle est surjective et si

$$\forall\, y \in Y,\ \exists\, V \in V(Y)\ p^{-1}(V) = \uplus_{i \in I} U_i,\ p_{|U_i} \in \mathrm{Diff}(U_i, V)$$

où les U_i sont des ouverts de X.

Théorème 5.4. *Soient X et Y deux variétés de même dimension, X étant compacte, et f définie de X dans Y ayant $y \in Y$ pour valeur régulière. Alors sur un voisinage V de y $f_{|f^{-1}(V)}$ est un revêtement.*

On a la propriété $\forall\, x \in f^{-1}(y),\ T_x f \in \mathrm{Isom}(T_x X, T_y Y)$. D'après le théorème d'inversion locale (dans sa version appliquée aux variétés), $\forall x \in f^{-1}(y),\ \exists\, U_x \in V(x)\ f_{|U_x} \in \mathrm{Diff}(U_x, f(U_x))$. $f^{-1}(y)$ est donc discret dans X compacte, et donc fini.

Il reste à triturer les ouverts pour qu'ils vérifient les conditions de l'énoncé.

$\triangleleft$

Théorème 5.5. *Théorème de Sard : si X et Y sont deux variétés de même dimension, et $f \in C^1(X, Y)$, alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle dans Y. Les valeurs régulières de f sont donc partout denses dans Y.*

C'est une conséquence beaucoup plus faible que l'on utilisera ci-dessous : f possède une valeur régulière.

5.3.1 Degré d'une application

Soient X et Y deux variétés connexes, compactes, orientées, de même dimension d, et $f \in C^\infty(X,Y)$. Alors il existe un entier relatif appelé degré de f et noté $\deg(f)$ tel que

1. $\forall \omega \in \Omega^d(Y)$, $\int_X f^*\omega = \deg(f) \int_Y \omega$
2. $\forall y \in Y$ régulier (ie tel que $\forall x \in X \, f(x) = y, f$ est une submersion en x), on a $\deg(f) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} \text{signe}(J_x(f))$

Démonstration

A f on associe $f^\star : H^d_{DR}(Y) \to H^d_{DR}(X)$. D'après 5.2, $H^d_{DR}(X)$ et $H^d_{DR}(Y)$ sont isomorphes à $\mathbb{R}$ par l'application d'intégration. On obtient donc naturellement un morphisme $\overline{f^\star} : \mathbb{R} \rightleftharpoons \mathbb{R}$ (qui est la multiplication par un réel k) tel que

$$\overline{f^\star} \circ I_Y = I_X \circ f^\star$$

ce qui montre que $\forall \omega \in \Omega^d(Y)$, $\int_X f^*\omega = k \int_Y \omega$.

Le fait que k soit entier résulte de la deuxième partie de la proposition, et de la propriété signalée en 5.5 selon laquelle f possède au moins une valeur régulière.

Soit $y \in Y$ valeur régulière de f. On peut alors appliquer la propriété de "revêtement local" 5.4, dont on reprend les notations, en choisissant le voisinage V connexe. On peut choisir une forme différentielle de degré maximal ω, à support dans V, et d'intégrale non nulle sur Y. Etant donné que $Supp(f^\star\omega) \subset f^{-1}(V)$, $\int_X f^\star\omega = \sum_{i=1}^n \int_{U_i} f^\star\omega$.

$f_{|U_i}$ est un difféomorphisme de U_i sur V connexe, et préserve donc ou renverse les orientations. Donc $\int_{U_i} f^\star\omega = \text{signe}(J_{x_i} f) \int_Y \omega$, d'où on déduit la formule annoncée.

$\triangleleft$

5.3.2 Propriétés

- Le degré est invariant par homotopie.
- Si X, Y, et Z sont des variétés de dimension d compactes, orientées, et connexes, $f \in C^\infty(X,Y)$, et $g \in C^\infty(Y,Z)$, alors $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$.
- Si f n'est pas une surjection, il existe un élément de Y non atteint ; c'est une valeur régulière de f, et on peut donc appliquer la propriété 2, d'où $\deg(f) = 0$.
- Le degré de l'antipodie σ sur S^d est $(-1)^{d+1}$ (on peut montrer de manière plus générale que $\forall f \in O(n+1)$, $\deg(f_{|S^d}) = \det(f)$, cf Zisman, Topologie algébrique élémentaire).

Démonstration :

On peut prendre pour forme volume sur S^d la forme ω suivante :

$$\omega = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i x_i . dx_0 \wedge .. \wedge \widehat{dx_i} \wedge .. \wedge dx_d$$

$$s^\star\omega = \sum_{i=0}^{d}(-1)^i(-x_i).(-dx_0) \wedge .. \wedge \widehat{dx_i} \wedge .. \wedge (-dx_d) = (-1)^{d+1}\omega$$

◁

5.4 Degré par rapport à une courbe

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et $\alpha \in C^\infty(S^1, E)$. Soient $a \in E \setminus \alpha(S^1)$, $\mu : S^1 \to S^1$ définie par

$\mu(t) = \frac{\alpha(t)-a}{\|\alpha(t)-a\|}$.

L'indice de a par rapport à α est par définition le degré de μ.

6 Applications

6.1 Application aux champs de vecteurs sur la sphère

Théorème 6.1. *Il existe un champ de vecteurs C^∞ partout non nul sur la sphère S^d si et seulement si d est impair.*

> Corollaire : au même instant, il ne peut y avoir du vent partout sur la Terre .

Un champ de vecteurs C^∞ sur X, jamais nul défini sur S^{2d-1} est le suivant, où l'on utilise l'identification entre $\mathbb{R}^2$et le corps des complexes :

$$Y(z_1, .., z_d) = (iz_1, .., iz_d)$$

Supposons d pair et que Y soit un champ de vecteurs continu, jamais nul sur S^d . On peut alors définir

$$Z : S^d \to S^d$$

$$t \longmapsto \frac{Y(t)}{\|Y(t)\|}$$

On peut alors définir l'homotopie suivante :

$$F : \mathbb{R} \times S^d \to S^d$$

$$(t, x) \longmapsto cos(\Pi t)x + sin(\Pi t)Z(x)$$

F est une homotopie entre l'identité et l'antipodie, qui sont de degrés différents, ce qui est absurde.

◁

6.2 Indices des champs de vecteurs

On considère un champ de vecteurs ξ C^∞ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$, tel que m soit un zéro isolé de ξ.

L'indice de ξ en m $\mathrm{Ind}_m\,\xi$ est le degré de l'application

$F : S^d \to S^d$

$x \mapsto \frac{X(m+\varepsilon x)}{\|X(m+\varepsilon x)\|}$, degré qui est le même pour tout ε tel que ξ ne s'annule qu'en m sur $B(m,\varepsilon)$.

Lemme 6.2. *Si* $\varphi : \Re^n \to \Re^n$ *est un difféomorphisme,* $\mathrm{Ind}_m\,\xi = \mathrm{Ind}_{\varphi(m)}\,\varphi_\star\xi$

Grâce à cette invariance par difféomorphisme, on peut donner un sens à l'indice d'un champ de vecteurs sur une variété C^∞.

Théorème 6.3. *Soit* ξ *un champ de vecteurs* C^∞ *sur* $\Re^d$*, dont les zéros dans* $B(0,1)$ *sont isolés et notés* $x_1,..,x_n$*, et rentrant sur* S^{d-1}*. Alors* $\sum_{i=1}^n \mathrm{indice}_{x_i}\,\xi = (-1)^d$.

Démonstration :

Les zéros étant en nombre fini, on peut trouver un ensemble de boules $(B_i)_{i=1..n}$ de centre x_i et de rayon $\varepsilon_i > 0$ telles que $i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \oslash$. On note $D = B(0,1) \setminus \cup_{i=1}^n \{x_i\}$.

Le champ étant rentrant, il ne s'annule pas sur un voisinage U de la boule unité privé des points $(x_i)_{i=1..n}$. On peut donc définir une fonction $f \in C^\infty(U \setminus \cup_{i=1}^n \{x_i\}, S^{d-1})$ comme suit :

$$f(x) = \frac{\xi(x)}{\|\ \xi(x)\ \|}$$

En notant ω la forme volume canonique de S^{d-1}, le théorème de Stokes donne

$$\int_D d(f^\star\omega) = \int_{S^{d-1}} f^\star\omega - \sum_{i=1}^n \int_{S(x_i,\varepsilon_i)} f^\star\omega$$

Or $\int_D d(f^\star\omega) = 0$ car $d(f^\star\omega) = f^\star(d\omega) = f^\star(0) = 0$ car ω est de degré maximal.

D'après la définition donnée ci-dessus de l'indice d'un champ de vecteurs, on trouve

$$\int_{S^{d-1}} f^\star\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{indice}_{x_i}\,\xi$$

Il reste donc à calculer le membre de gauche. On va montrer que $f_{|S^{d-1}}$ est homotope à l'antipodie σ, ce qui d'après les propriétés signalées en 5.3.2 achèvera la démonstration. Soit donc

$$F(t,x) = \frac{(1-t)\xi(x) - tx}{\|\ (1-t)\xi(x) - tx\ \|}$$

Le champ étant rentrant, le dénominateur de cette expression ne s'annule pas pour $t \in [0,1]$. Le produit $[0,1] \times S^{d-1}$ étant compact, et le dénominateur étant une fonction continue du couple (t,x), il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que le dénominateur soit non nul sur $[-\alpha, 1+\alpha]$. F est alors C^∞ sur $[-\alpha, 1+\alpha] \times S^{d-1}$, et définit donc une homotopie.

$\triangleleft$

Le théorème suivant est cité parce qu'il donne une généralisation intéressante des résultats précédents, mais sa démonstration n'est pas aisée. La caractéristique d'Euler d'une variété à bord peut être calculée à l'aide de la cohomologie de de Rham, en utilisant la notion de cohomologie relative (dans cette cohomologie, on considère les formes différentielles qui s'annulent sur un sous-espace de l'espace étudié, par exemple qui s'annulent sur son bord).

Théorème 6.4. *Théorème de Poincaré-Hopf : soit X une variété C^∞ compacte à bord, ξ un champ de vecteurs C^∞ sur X, sortant sur le bord, et dont les zéros sont isolés. Alors on a*

$$\chi(X) = \sum_{\{x|\xi(x)=0\}} \mathrm{Ind}_x\,\xi$$

On voit en particulier que si la caractéristique d'Euler est non nulle, tout champ de vecteurs doit s'annuler. Dans le cas de la sphère de $\mathbb{R}^{2n+1}$, il n'existe donc pas de champ de vecteurs jamais nul : on retrouve le résultat précédent.

7 Formule de Gauss-Bonnet

L'application de Gauss est $\gamma : NUX \to S(E), (x, v) \mapsto v$.

Soit $f_{(x,v)} \in C^\infty(X)$ définie de la manière suivante pour $(x, v) \in NUX$:

$f_{(x,v)}(y) =< v \mid y >$.

Lemme 7.1. *$f_{(x,v)}$ admet en x un point critique non dégénéré si et seulement si (x, v) n'est pas un point critique de γ. Si E est de dimension paire, on a* $\mathrm{signe}(J_{(x,v)}\gamma) = (-1)^{\mathrm{indice}_x\, f(x,v)}$.

Théorème 7.2. *Soit X une sous-variété compacte de dimension d paire de E espace vectoriel euclidien de dimension n. On a $\deg(\gamma) = \chi(X)$, et $\int_X K_d\delta = \chi(X).\mathrm{Volume}(S^{n-1})$, cette dernière formule étant la formule de Gauss-Bonnet.*

Démonstration (avec les mêmes notations que ci-dessus)

On est dans le bon cadre pour appliquer la théorie du degré car $S(E)$ et NUX sont des variétés compactes connexes, de même dimension $n-1$, et orientées de manière canonique.

D'après 5.5, γ possède une valeur régulière $v \in S(E)$. $\gamma^{-1}(v) = \bigcup_{i=1}^n \{(x_i, v)\}$ est donc fini. Soit $f_v : X \to \mathbb{R}$, $y \longmapsto < v \mid y >$. f_v est critique en y si et seulement si $v \in N_yX$, soit $\gamma(y, v) = v$, i.e. $y = x_i$ pour un certain i. v étant valeur régulière de γ par hypothèse, les x_i sont des points critiques non dégénérés d'après 7.1. En application de 4.7 on a

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k c_k(f_v) = \mathrm{Card}\{x_i|\,\mathrm{indice}_{x_i}\, f_v \text{ pair}\} - \mathrm{Card}\{x_i|\,\mathrm{indice}_{x_i}\, f_v \text{ impair}\}$$

E étant de dimension paire, 7.1 donne encore

$\chi(X) = \text{Card}\{x_i |\, \text{signe}(J_{(x_i,v)}\gamma) = 1\} - \text{Card}\{x_i |\, \text{signe}(J_{(x_i,v)}\gamma) = -1\} = \deg(\gamma)$

D'après 1.2, $\int_X K_d\delta = \int_{NUX} \gamma^\star\Sigma = \deg(\gamma)\int_{S(E)} \Sigma = \text{Volume}(S(E)).\deg(\gamma)$.
Donc

$$\int_X K_d\delta = \chi(X).\,\text{Volume}(S^{n-1})$$

◁

Corollaire 7.3. *Dans le cas* $d = 2$, $\text{Volume}(\text{TUB}^\varepsilon(X)) = \varepsilon^{n-2}.\,\text{Volume}(B^{n-2}(0,1)) + \frac{\varepsilon^n}{n}.\,\text{Volume}(S^{n-1}).\chi(X)$

La propriété remarquable de la formule de Gauss-Bonnet est que l'on relie l'intégrale de la courbure de Weyl à un invariant de la variété, de manière indépendante du plongement de la variété dans un espace euclidien.

8 Références

Les sections 1, 5, 6, et 7 sont directement tirées de M. Berger, B. Gostiaux, Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces, livre très complet mais ne développant pas beaucoup les aspects d'homologie et de théorie de Morse.

Les autres références sont signalées au cours du texte et sont, par ordre décroissant d'importance :

J. Milnor, Morse Theory

C. Godbillon, Éléments de topologie algébrique

M. Henle, a combinatorial introduction to topology